CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

CLASA A IX-A

1. În planul raportat la un reper cartezian (xOy) se consideră punctele $A(-3,1)$, $B(1,-1)$ şi $C(4,2)$.

a) Demonstrați că nu există nicio funcţie al cărei grafic să fie reuniunea segmentelor $[AB]$ şi $[AC]$.

b) Determinaţi funcţia al cărei grafic este reuniunea segmentelor $[AB]$ şi $[BC]$.

2. Numerele $x \in (0,2\pi)$ şi $a,b,c \in \mathbb{R}^*$ sunt astfel încât $\frac{\sin x}{a} = \frac{\sin 3x}{b} = \frac{\sin 5x}{c}$.

a) Dacă $x \neq \pi$, demonstraţi că $a \cdot (a+b+c) = b^2$.

b) Determinaţi numărul x, ştiind că a,b,c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

3. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, având centrul cercului circumscris O şi centrul de greutate G. Dacă M este un punct oarecare din plan, definim punctul M' prin relația $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

a) Demonstrați că $\overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{MG}$.

b) Dacă M este situat pe cercul de rază R circumscris triunghiului ABC, arătaţi că punctul asociat M' aparţine cercului de centru A şi rază $2R$.

4. O foaie de tablă are forma unui dreptunghi cu lungimea de 12 m şi lăţimea de 4 m. Decupând această foaie obţinem, fără pierderi, cinci dreptunghiuri care constituie cele cinci feţe ale unui rezervor paralelipipedic fără capac. Determinaţi volumul acestui rezervor, ştiind că este maxim posibil.

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

CLASA A X-A

1. Dacă z este soluție a ecuației $x+\dfrac{1}{x}=2\cos\theta$, arătați că $z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos n\theta,\quad \forall n\in\mathbb{N}$.

2. Fie $A=\left(2+\sqrt{3}\right)^{2016}$.

a) Arătați că $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2016}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{2016}$ este număr natural.

b) Arătați că pentru $\forall n\in\mathbb{N}, \exists p,q\in\mathbb{N}$ așa încât $\left(2+\sqrt{3}\right)^n=p+q\sqrt{3}$, iar $3q^2=p^2-1$.

c) Demonstrați că $[A]$ este număr natural impar (unde $[A]$ reprezintă partea întreagă a lui A).

d) Demonstrați că $\dfrac{([A]-1)([A]+3)}{12}$ este pătrat perfect.

3. Rezolvați ecuația $3\cdot 2^{\log_x(3x-2)}+2\cdot 3^{\log_x(3x-2)}-5\cdot 6^{\log_{x^2}(3x-2)}=0$.

4. Avem p penare și c creioane. Dacă așezăm câte un creion în fiecare penar, rămân n creioane afară. Dacă așezăm câte n creioane în fiecare penar, rămân n penare goale. Câte creioane și câte penare avem ?

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

CLASA A XI-A

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}$ formată din toate matricele cu 3 linii și 3 coloane și care au toate elemente din mulțimea $\{-1,1\}$.

a) Aflați cardinalul mulțimii $\mathcal{M}$.

b) Dați exemplu de trei matrici $A, B, C \in \mathcal{M}$ astfel încât $\det A = 0, \det B = 4, \det C = -4$.

c) Demonstrați că $\forall T \in \mathcal{M}$, atunci $\det T \in \{-4, 0, 4\}$.

d) Argumentați că, dacă $L \in \mathcal{M}$ atunci matricea L^{2016} are toate elementele nenule.

2. a) Fie punctele laticiale (adică puncte cu ambele coordonate numere întregi) $A(1,0); B(0,2); C(2,3); D(4,2)$ și $E(3,0)$. Calculați prin trei metode aria pentagonului $ABCDE$.

b) Demonstrați că nu există un triunghi echilateral cu toate vârfurile puncte laticiale.

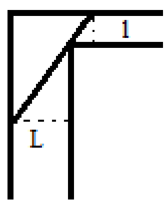
(Se admite cunoscută teorema lui Pick: *Aria unui poligon $\mathcal{P}$ ale cărui vârfuri au coordonate întregi este egală cu $\mathcal{A}(\mathcal{P}) = i + \frac{f}{2} - 1$, unde i reprezintă numărul punctelor laticiale din interiorul poligonului $\mathcal{P}$, respectiv f este numărul punctelor laticiale de pe frontiera lui $\mathcal{P}$*)

3. Se consideră sistemul:
$$\begin{cases} 2015x + 2016y + 2017z = \frac{1}{2}x \\ 2017x + 2015y + 2016z = \frac{1}{2}y \\ 2016x + 2017y + 2015z = \frac{1}{2}z \end{cases}$$

a) Indicați o soluție a sistemului.

b) Demonstrați că sistemul are o unică soluție.

4. Dorel vrea să transporte o țeavă de cupru de lungime Λ (grosimea poate fi presupusă neglijabilă) care trebuie trecută dintr-un culoar de lățime L într-un culoar perpendicular pe primul, de lățime l (vezi desenul alăturat). Țeava trebuie să fie paralelă cu solul, în orice moment și nu poate fi îndoită.



Demonstrați că lungimea maximă a țevii pe care Dorel o poate transporta este:
$$\Lambda_{\max} = \left(L^{\frac{2}{3}} + l^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

CLASA A XII-A

1. Să se rezolve in $\mathbb{Z}_6$ sistemul : $\begin{cases} x(y+z)=\hat{2} \\ y(x+z)=\hat{2} \\ z(x+y)=\hat{2} \end{cases}$

2. Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{x+3}^{2x+3} t\sqrt{t^3+9}\,dt$.

3. Să se determine numerele reale m, p, q şi să se rezolve ecuaţiile $x^3-3x+m=0$, $x^4+px^2+qx+2=0$, ştiind ca au o soluţie dublă comună.

4. Să se determine $n > 0$ astfel încât aria $S(n)$ a mulţimii cuprinse între reprezentarea grafică a funcţiei $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\left|x^2-n\right|$, axa Ox, dreptele $x = 0$ şi $x = 1$ să fie minimă.

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.